**Метод гармонического баланса**

Периодические режимы во многих нелинейных системах харак­терны тем, что в некоторых точках системы изменения координат происходят по законам, близким к синусоидальным [5,6,7,8].

Рассмотрим, например, процессы, происходящие в цепи воз­буждения генератора *Г*с вибрационным регулятором напряжения (см. рисунок 2.1, *а).*



Рисунок 2.1 – Переходные процессы в цепи воз­буждения генератора с вибрационным регулятором напряжения

Регулятор периодически замыкает и размыкает свои контакты *К,*шунтирующие активное сопротивление *r*. Со­противление цепи при этом изменяется по закону прямоуголь­ника (см. рисунок 2.1, *б*), ток возбуждения  возбудителя *В -* по пило­образной кривой (см. рисунок 2.1, *в),*ток возбуждения генератора  - по сглаженной кривой, более или менее близкой к синусоиде (см. рисунок 2.1, *г).*Несмотря на то что на вход системы подается прямоугольная волна, обладающая резко выраженными высшими гармониками, на выходе ее выделяется достаточно ощутимо лишь основная гармоника колебаний, остальные гармонические сильно ослабляются благодаря тому, что система в силу своей инерцион­ности обладает свойством фильтра, не пропускающего высших гармонических.

В других случаях выделение основной гармонической составляющей обуслов­лено наличием в системе резонансных цепей, настроенных на эту основную гармоническую частоту. Все остальные гармоники нахо­дятся в удалении от резонансного пика и резко ослабляются.

Метод гармонического баланса применим к системам, состоя­щим, вообще говоря, из нескольких нелинейных и линейных ча­стей. Если в системе установилось гармоническое периодическое движение с частотой *ω*, то, как известно, в какой-либо -й линей­ной части системы, описываемой уравнением  **, связь между выходным и входным периодическими значениями дается следующими зависимостями

                                    ,                                   (2.1)

или

                                                                                   (2.2)

где точки над обозначениями переменных указывают на то, что это периодические величины, выраженные в комплексной форме:

                                                    

                                                                                                   (2.3)

 иными словами, значения *Xi*и *Уi* можно связать с помощью ком­плексных передаточных функций (амплитудно-фазовых частотных характеристик) –   прямой *Wi*или обратной *Gi*.

Аналогично связь между основными гармониками выходной и входной периодических величин нелинейного элемента устанав­ливается с помощью комплексной функции, носящей название гармонического коэффициента передачи или, по американской терминологии, описывающей (*descri­bing*) функции (в литературе можно встретить и другие ее названия: комплексный коэффициент усиления или проводимость нелинейного элемента).

Пусть на вход нелинейного элемента действует гармоническая величина, которую можно записать в виде

 **.                                                 (2.4)

Рассмотрим сначала безынерционный нелинейный элемент, для которого входная величина *х*и выходная *у*связаны между собой нелиней­ной зависимостью

                                                                                                               (2.5)

где функция *f (х)*удовлетворяет условиям Дирихле.

Тогда первая гармоника периодической величины выхода нелинейного эле­мента:

**,(2.6)

где *В*и*С*определяются как коэффициенты Фурье:

                                            ,

                                            .

В методе гармонического баланса вводят в рассмотрение, вместо коэффициентов *В*и С, их отношения к амплитуде входного коле­бания *А*:

                                             ,                            (2.7)

                                             ,                           (2.8)

тогда

                                                 .                             (2.9)

Представим *х*и *y*в комплексной форме

                                                ,                              (2.10)

                            .    (2.11)

Как обычно, для упрощения математического описания *х*и *у*выражают в укороченной комплексной форме; например, пола­гают, что ,т.е. рассматривают только те слагаемые, которые соответствуют положительным частотам. Тогда из выражения (2.11)

                                                        ,                                      (2.12)

а отношение                                                                         (2.13)

называют гармоническим коэффициентом передачи, или описы­вающей функцией нелинейного элемента.

Если принять ,т. е. рассматривать область отрицательных частот, то в этом случае . Это означает, что имеет две симметричные относительно вещественной оси ветви, соответствующие положительным и отрицательным частотам так же, как это имеет место и для характеристик  и . Поэтому общее выраже­ние для,  следовало бы записать так:

                                                                       .                                                   (2.14)

 Рассмотрим гармонические коэффициенты передачи некоторых нелинейных элементов.

Характеристики *f(x)*нелинейных элементов делятся на две основные группы – однозначные и неоднозначные.

При гармоническом воздействии основная гармоника выходных колебаний безынерционных нелинейных элементов с однозначными характеристиками совпадает по фазе с входной величиной, поэтому косинусная составляющая в выражении (2.11) отсутствует. Для этих элементов  и гармонический коэффициент передачи является величиной ве­щественной:

                                                          .                                                 (2.15)

Многие нелинейные элементы имеют характеристики, симмет­ричные относительно начала координат (см. рисунок 2.2). Для этих характеристик функция *f(x)*есть функция нечетная:

                                                                          .                                           (2.16)

В качестве примера рассмотрим кусочно-линейную характери­стику, показанную на рисунке 2.2, *а*. На этой характеристике можно указать три зоны: зона нечувствительности , зона линейности , зона насыщения . В зоне нечув­ствительности на выходе нелинейного элемента ничего нет; в зоне линейности изменения выходной величины пропорциональны изменениям входной; в зоне насыщения выходная величина остается постоянной:

                                                                         (2.17)

очевидно,  что

                                                           ,                                                 (2.18)

так как характеристика однозначна,  .



Рисунок 2.2 - Характеристики нелинейных элементов

На рисунке 2.2также представлены кусочно-линейные характери­стики нелинейных элементов с зоной нечув­ствительности и зоной линейности     (см. рисунок 2.2, *б*) и без зоны нечув­ствительности (см. рисунок 2.2, *в*). На рисунке 2.2, *г*и рисунке2.2, *д* приведены характеристики релейного элемента с зоной нечувствительности и без зоны нечувствительности соответственно.

На рисунке 2.3 приведены кривые изменения входной величины нелинейного элемента *х(t)*и выходной величины *у(t)*. Кривая *1*на этом рисунке изображает изменение входной величины нелинейного элемента .



 Рисунок 2.3 - Кривые изменения входной величины нелинейного элемента *х*и выходной величины *у*

Кривая *2*изображает изме­нение выходной величины *у(t).*От момента   до того момента, когда *х(t)*станет равным *а*, выходная величина . В этот момент фазовый угол *Ψ* определяется из равен­ства  и будет соответственно равен

                                                   .                                        (2.19)